Kurvendiskussion

4 Beispiele

1) $f(x) = x^3 - 3x$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2$

3) $f(x) = x^4 - 4x^3$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$

<u>Untersuchung auf</u>

- Symmetrie
- Nullstellen
- Extrema
- Monotonie
- Wendepunkte
  & Krümmungsverlauf

Tutorials unter: www.logeum.org/Bsp_Kurvendisk.php

Kurvendiskussion

$$f(x) = x^3 - 3x$$

1) f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da ausschließlich ungerade Exponenten von x vorkommen.

2) **Nullstellen** $f(x) = 0$

$x^3 - 3x = 0$

$x \cdot x^2 - x \cdot 3 = 0$

$x \cdot (x^2 - 3) = 0$ Nullprodukt

$x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3}$

4) **Monotonie**

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	9	0	-3	0	9
	$+$		$-$		$+$

- f ist streng monoton steigend für $x \leq -1$ oder $x \geq$
- f ist streng monoton fallend für $-1 \leq x \leq 1$

5) **Wendepunkte & Kurvenverhalten**

$f''(x) = 0$ $6x = 0$, $\underline{x = 0}$ notwendige Bedingung für einen WP.

$f'''(x) \neq 0$ $f'''(0) = 6$ hinreichende Bedingung für einen WP.

$f(0) = 0$

Wendepunkt $WP(0/0)$

- f ist linksgekrümmt für $x > 0$
- f ist rechtsgekrümmt für $x < 0$

3) **Extrema** $f'(x) = 0$ notwendige Bedingung für Extrema

$3x^2 - 3 = 0 \quad | +3$

$3x^2 = 3 \quad | :3$

$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{x = 1}$ oder $\underline{x = -1}$ (mögliche Extremstellen)

Alternativen

$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$ hinreichende Bedingung für ein Minimum

Untersuche mögliche Extreme bei $x = 1$

x	0	1	2
$f'(x)$	-3	0	9
	$-$	0	$+$

VZW $-$ 0 $+$ (in f') hinreichende Bedingung für ein Minimum

Bei $x = 1$ liegt ein Minimum } Linkskurve

$f(1) = -2$

Tiefpunkt $\underline{T(1/-2)}$

Alternativen

$f''(-1) = -6 < 0$ hinreichende Bedingung für ein Maximum

Untersuche mögliche Extremstelle $x = -1$

x	-2	-1	0
$f'(x)$	9	0	-3
	$+$	0	$-$

VZW $+$ 0 $-$ hinreichende Bed. für ein Max

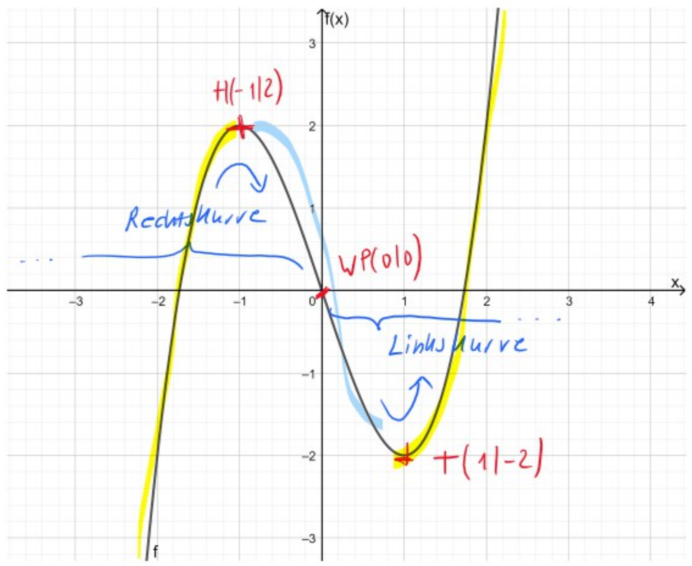
Bei $x = -1$ liegt ein Maximum } Rechtskurve

$f(-1) = 2$

Hochpunkt $H(-1/2)$

6) **Wertetabelle & Schaubild**

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

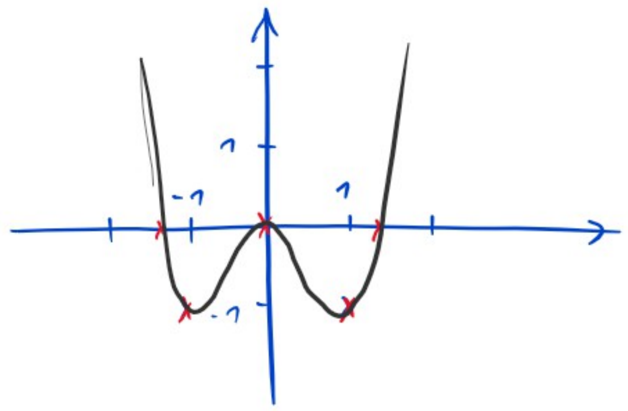


Kurvendiskussion

$f(x) = x^4 - 2x^2$

1) f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da nur gerade Exponenten von x vorkommen

$f(x) = x^4 - 2x^2$
$f'(x) = 4x^3 - 4x$
$f''(x) = 12x^2 - 4$
$f'''(x) = 24x$



2) **Nullstellen** $f(x) = 0$

$0 = x^4 - 2x^2$
$0 = x^2 \cdot x^2 - x^2 \cdot 2$
$0 = x^2(x^2 - 2)$
$\underline{x = 0}$ oder $\underline{x = -\sqrt{2}}$ oder $\underline{x = \sqrt{2}}$

3) **Extrema** $f'(x) = 0$

$0 = 4x^3 - 4x$
$0 = 4x \cdot x^2 - 4x \cdot 1$
$0 = 4x(x^2 - 1)$
$\underline{x = 0}$ oder $\underline{x = -1}$ oder $\underline{x = 1}$

Untersuche $x = 1$
$f''(1) = 8 > 0$ Min bei $x = 1$
$f(1) = -1$
Tiefpunkt $\underline{T_1(1 / -1)}$

Untersuche $x = 0$
$f''(0) = -4 < 0$ (Max bei $x = 0$)
$f(0) = 0$
Hochpunkt $\underline{H(0/0)}$

Untersuche $x = -1$
Wegen der Achsensymmetrie muss ein zweiter Tiefpunkt bei $x = -1$ liegen. Also $\underline{T_2(-1/-1)}$

4) **Monotonie**

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f'(x)$	-24	0	$+\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	24

f ist streng monoton steigend für $x \in [-1; 0]$ und $x \geq 1$

f ist streng monoton fallend für $x \leq -1$ und $x \in [0; 1]$

5) **Wendepunkte und Krümmungsverlauf**

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$x^2 = \frac{1}{3}$
$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'''(x) = 12x$ $f'''(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0$
$f'''(\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 0$

$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = (-\frac{1}{\sqrt{3}})^4 - 2(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2$
$= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{5}{9}$

$\underline{WP_1(-\frac{\sqrt{3}}{3} / -\frac{5}{9})}$

$\underline{WP_2(\frac{\sqrt{3}}{3} / \frac{5}{9})}$ (Achsensymmetrie)

Krümmungsverlauf

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f''(x)$	8	0	-4	0	8
	L		R		L

f ist rechtsgekrümmt für $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

f ist linksgekrümmt für $x < \frac{1}{2}$ oder $x < -\frac{1}{2}$

Kurvendiskussion

$f(x) = x^4 - 4x^3$

1) Keine Punktsymmetrie zum Ursprung und keine Achsensymmetrie zur y-Achse

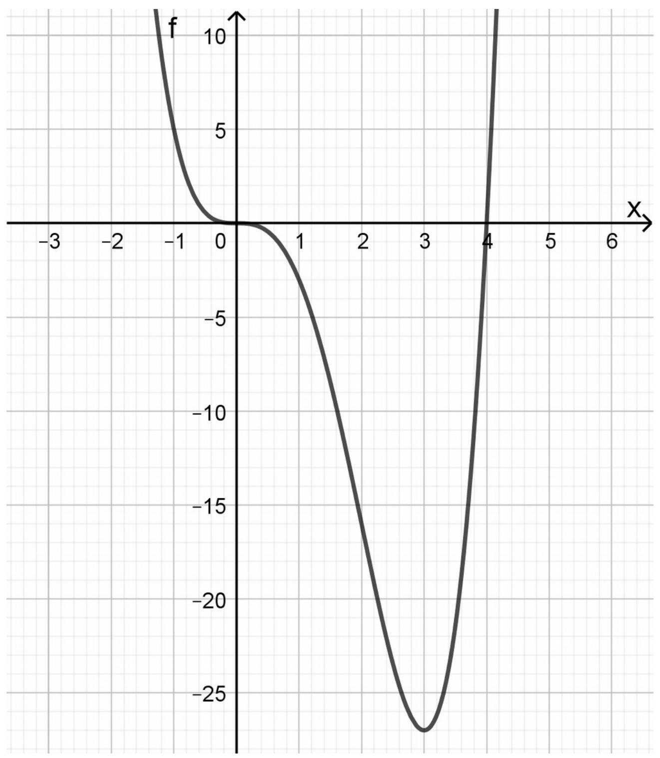
2) Nullstellen $\quad f(x) = 0$

$0 = x^4 - 4x^3$

$0 = x^3 \cdot x - x^3 \cdot 4$

$0 = x^3 \cdot (x-4)$

$x = 0$ oder $x = 4$



$f(x) = x^4 - 4x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f'''(x) = 24x - 24$

3) Extrema $\quad f'(x) = 0$

$0 = 4x^3 - 12x^2$

$0 = 4x^2 \cdot x - 4x^2 \cdot 3$

$0 = 4x^2 (x-3)$

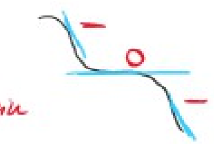
$x = 0$ oder $x = 3$ $\quad$ mögliche Extremstellen

$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$

Keine Aussage möglich

$\downarrow$ VZW ?

x	-1	0	1
$f'(x)$	-8	0	-8
	$-$	0	$-$



Kein VZW in f'. Hier liegt ein Sattelpunkt

$f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3$

$= 12 \cdot 9 - 24 \cdot 3$

$= 108 - 72$

$= 36 > 0$ $\quad$ Min bei $x = 3$

$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3$

$= 81 - 108 = -27$

Tiefpunkt $T(3|-27)$

4) Monotonie

x	-1	0	1	2	3	4
$f'(x)$	-8	0	-8		0	64

... fallend ... steigend ...

f ist streng monoton fallend für $x \leq 0$

f ist streng monoton steigend für $x \geq 0$

5) Krümmung und Wendepunkte

Wendepunkte: $\quad f''(x) = 0$

$0 = 12x^2 - 24x$

$0 = 12x \cdot x - 12x \cdot 2$

$0 = 12x \cdot (x-2)$

$x = 0$ oder $x = 2$

$f(0) = 0$

$WP_1\ (0|0)$ (Sattelpunkt)

$f''(2) = 24 \cdot 2 - 24$

$= 24 \neq 0$

$f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3$

$= 16 - 32 = -16$

$WP_2\ (2|-16)$

Krümmungsverlauf

x	-1	0	1	2	3
$f''(x)$	36	0	-12	0	36

f ist linksgekrümmt für $x < 0$ oder $x > 2$

f ist rechtsgekrümmt für $0 < x < 2$

Kurvendiskussion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$$

1) Symmetrie

f ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung und
f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse

2) Nullstellen $f(x) = 0$

$0 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4$

$0 = x^3 \cdot \frac{1}{2} - x^3 \cdot \frac{1}{8}x$

$0 = x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x\right)$

$x = 0$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x = 0 \quad | + \frac{1}{8}x$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{8}x \quad | \cdot 8$

$4 = x$

$x = 0$ oder $x = 4$

4) Monotonie

x	-1	0	1	3	4
$f'(x)$	2	0	1	0	-8
	+	0	+	0	−

f ist streng monoton steigend für $x \leq 3$

f ist streng monoton fallend für $x \geq 3$

3) Extrema $f'(x) = 0$

$0 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$

$0 = x^2 \cdot \frac{3}{2} - x^2 \cdot \frac{1}{2}x$

$0 = x^2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right)$

$x = 0$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = 0 \quad | + \frac{1}{2}x$

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2}x \quad | \cdot 2$

$3 = x$

$x = 0$ oder $x = 3$ (mögliche Extremstellen)

Untersuche Stelle $x = 3$

$f''(3) = -\frac{9}{2} < 0$

Max bei $x = 3$

Rechtskrümmung bei $x = 3$

$f(3) = \frac{27}{8} = 3{,}375$

Hochpunkt $H(3 | 3{,}375)$

Untersuche Stelle $x = 0$

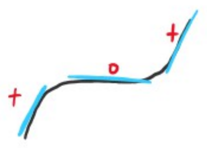
$f''(0) = 0 \longrightarrow$ Keine Aussage möglich

VZW - Kriterium

x	-1	0	1
$f'(x)$	2	0	1
	+	0	+

$f(0) = 0$

Sattelpunkt bei $WP_1(0|0)$



Liegt bei x_0 ein Sattelpunkt, wenn sowohl $f'(x_0) = 0$ als auch $f''(x_0) = 0$?

Nein! Muss nicht zwingend sein.

Gegenbeispiel $f(x) = x^4$

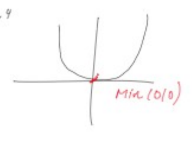
$f'(x) = 4x^3$

$f'(x) = 0 : \quad 0 = 4x^3$

$x = 0$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(x) = 12 \cdot 0^2 = 0$



5) Wendepunkte und Krümmungsverlauf

$f''(x) = 0$

$0 = 3x - \frac{3}{2}x^2$

$0 = x \cdot 3 - x \cdot \frac{3}{2}x$

$0 = x\left(3 - \frac{3}{2}x\right)$

$x = 0$

$3 - \frac{3}{2}x = 0$

$3 = \frac{3}{2}x \quad | \cdot 2$

$6 = 3x \quad | : 3$

$x = 2$

$x = 0$ oder $x = 2$

$f'''(0) \neq 0$ ✓ $WP_1(0|0)$

$f'''(2) \neq 0$ ✓ $WP_2(2|2)$

Krümmungsverlauf

R, L, R

x	-1	0	1	2	3
$f''(x)$	$-\frac{9}{2}$	0	$3/2$	0	$-9/2$
	−	0	+	0	−

f ist rechtsgekrümmt für $x < 0$ oder $x > 2$

f ist linksgekrümmt für $0 < x < 2$

6) Werktabelle und Schaubild

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-6	$-5/8$	0	$3/8$	2	3,375	0